ある種の4階Fuchs型常微分方程式系のMonodromy群と既約性条件について (常微分方程式の定性的研究)

佐々井, 崇雄

数理解析研究所講究録
282巻 1976年 63-72

ある種の4階Fuchs型常微分方程式系のmonodromy群と既約性条件について

佐々井崇雄（都立大・理）

次の4階systemを考える。

(#)
$$\left[tI - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{pmatrix}\right]\frac{dx}{dt} = Ax$$

Iは4次の単位行列。$\lambda_1 = \lambda_2$。$A = (a_{ij})$は4×4定数行列。xは4次のベクトル。更に以下の仮定を設ける。

(A-1). $|A - \rho I| = (\rho_1 - \rho)^2(\rho_2 - \rho)^2$ かつ Aは対角化可能。

(A-2). a_{ii}, $a_{jj} - a_{kk}$ $(j \neq k)$, ρ_ℓ, $\rho_1 - \rho_2$ は整数でない。従って、解はlogを含まない。

この方程式はRiemann球上、4つの確定特異点 $t = \lambda_1 = \lambda_2$, λ_3, λ_4, ∞ をもつFuchs型方程式で、各点での特性指数は

$$\left\{\begin{matrix} \lambda_1=\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \infty \\ a_{11} & 0 & 0 & \rho_1 \\ a_{22} & 0 & 0 & \rho_1 \\ 0 & a_{33} & 0 & \rho_2 \\ 0 & 0 & a_{44} & \rho_2 \end{matrix}\right\}$$

である。又、Fuchs の関係式は

<u>Prop. 1.</u> $\sum_{j=1}^{4} a_{jj} = 2(\rho_1+\rho_2)$. $e_j = \exp(2\pi i\, a_{jj})$. $f_j = \exp(2\pi i \rho_j)$ とかくと、この式は又

$$\prod_{j=1}^{4} e_j = (f_1 f_2)^2.$$

とも書ける。

Proof. 単なる、A の trace の不変性、である。

<u>Prop. 2.</u> B を不変にする最も一般な行列 T ($TBT^{-1}=B$) は、$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ (ここに、T_1 は 2×2 non-singular constant matrix, T_2 は 2×2 non-singular constant diagonal matrix) で表わされる。

<u>Prop. 3.</u> この T を適当に選べば、A の成分のうち $a_{12}=a_{21}=0$, 残りのうち 0 でないもの 3 つは、任意の値を

とらすことが出来る。

これによって、(#)を考える時 $a_{12}=a_{21}=0$ の場合を考えれば良いことがわかった。以下では系(#)が accessary parameter を持たない事を示す。

<u>Prop. 4.</u> 仮に a_{4j} $(j=1,2,3)$ は non-zero とする。その時、a_{kl} $(k\neq l)$ は対角要素 a_{ii}, 固有値 ρ_m そして a_{4j} を用いて次のように表わされる。

(1) $$a_{13}=\frac{(a_{11}-\rho_1)(a_{11}-\rho_2)}{a_{11}-a_{22}}\cdot\frac{a_{43}}{a_{41}}.$$

(2) $$a_{14}=\frac{(a_{11}-\rho_1)(a_{11}-\rho_2)}{a_{22}-a_{11}}\cdot(a_{11}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)\cdot\frac{1}{a_{41}}.$$

(3) $$a_{23}=\frac{(a_{22}-\rho_1)(a_{22}-\rho_2)}{a_{22}-a_{11}}\cdot\frac{a_{43}}{a_{42}}.$$

(4) $$a_{24}=\frac{(a_{22}-\rho_1)(a_{22}-\rho_2)}{a_{11}-a_{22}}\cdot(a_{22}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)\cdot\frac{1}{a_{42}}$$

(5) $$a_{31}=(a_{22}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)\cdot\frac{a_{41}}{a_{43}}$$

(6) $$a_{32}=(a_{11}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)\cdot\frac{a_{42}}{a_{43}}$$

(7) $a_{34} = (a_{11}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)(a_{22}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)\cdot\frac{1}{a_{43}}$.

Proof. まづ(A-1)によって $\mathrm{rank}(A-\rho_j I)=2$ ($j=1,2$) である。従って $A-\rho_j I$ の16ケの3次小行列式は全て0でなくてはならない。この事から ρ_1, ρ_2 を共通根としてもつ、4個の2次方程式(ρに関する)を得る。

(i) $$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\rho & 0 & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = 0.$$

(ii) $$\det\begin{bmatrix} 0 & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = 0.$$

(iii) $$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\rho & 0 & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44}-\rho \end{bmatrix} = 0.$$

(iv) $$\det\begin{bmatrix} 0 & a_{22}-\rho & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44}-\rho \end{bmatrix} = 0.$$

これに根と係数の関係を適用し、Prop. 1 に注意しながら計算することで、所要の関係式7つを得る。

<u>Theorem 5</u>. (#) は accessary parameter を持たぬ。

Proof. 特性指数 a_{ii}, ρ_j を与えて、A が定まるかという事だが、まず、$a_{12}=a_{21}=0$. 対角要素は指数そのものであり、3つは任意の値を指定できる。残り7つは Prop. 4 で定まる。これは勿論 $a_{4k}\neq 0$ ($k=1,2,3$) の場合だが、そのうち少なくも一つが0の時も、定める方法は Prop. 4 と同じである。

ここで、接続問題に於ける大切な公式を述べておく。これは大久保氏 [1] によって、より一般な case に於いて証明されたもので、古典的な超幾何方程式論で登場する Gauss の公式の一般化である。

<u>Theorem 6</u>. (Gauss-大久保の公式) 系 (#) は4つの有限な特異点 $t=\lambda_1(=\lambda_2)$、λ_3, λ_4 に於いて定義され、それぞれの特性指数 a_{jj} と、初めの係数に対する正規化条件 $g_j(0)=\varepsilon_j$ (ただし、ε_j は4-vector で、j 番目の成分のみ1、他は全て0のもの) に対応する、4つの unique singular solution $X_j(t)$ ($j=1,2,3,4$) をもつ。

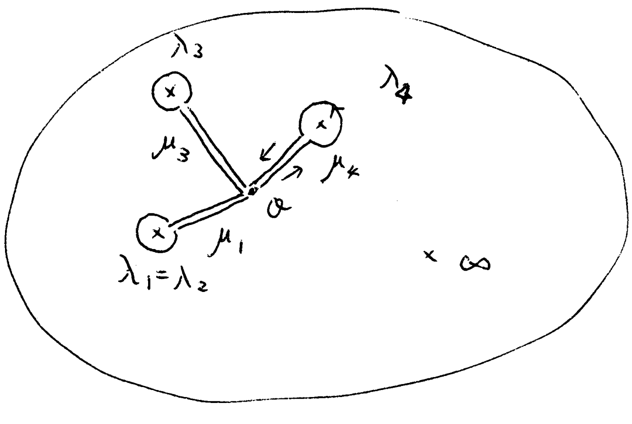
$$X_j(t) = (t-\lambda_j)^{a_{jj}} \sum_{m=0}^{\infty} g_j(m)(t-\lambda_j)^m.$$

更に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \infty\}$ の任意の単連結領域に於いて、それらの Wronskian は

$$\det X = \frac{\prod_{j=1}^{4} [(t-\lambda_j)^{a_{jj}} \Gamma(a_{jj}+1)]}{[\Gamma(\rho_1+1)\cdot\Gamma(\rho_2+1)]^2}$$

となり、これによって4つの解の独立性が解る。

次にこの basis $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]$ に関するモノドロミー群について考えよう。まず基本群の base point o を固定しておく。次に特異点の回りの simple loop を、λ_j に対応して μ_j とし、更に下図の様になっているものとする。



即ち、$\mu_j\cdot\mu_k$ を μ_k を先に回り次に μ_j を回るものとした時上の取り方は $\mu_1\cdot\mu_3\cdot\mu_4$ は無限遠点 ∞ を負の向きに一周す

るもの、とする。又、μ_j に対応する、basis X に関する行列を M_j と書くことにすると、Theorem 6 により

$$M_1 = I + \begin{bmatrix} e_1-1 & & & 0 \\ & e_2-1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ 0 & 1 & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ & \boxed{0} & & \end{bmatrix} .$$

$$M_3 = I + (e_3-1) \begin{bmatrix} & \boxed{0} & & \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & \gamma_{34} \\ - & 0 & - & \end{bmatrix} .$$

$$M_4 = I + (e_4-1) \begin{bmatrix} & \boxed{0} & & \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

と表わされる事がわかる。従って、モノドロミー群を求めるには、上の γ_{ij} を求めればよい。今、

$$c_{jj} \equiv e_j - 1 \ , \quad c_{jk} \equiv (e_j - 1)\, \gamma_{jk} \quad (j \neq k)$$

としよう。行列 L_1, L_2 を

$$L_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & & \text{\Large O} & \\ 0 & c_{22} & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ & 0 & c_{23} & c_{24} \\ & \text{\Large O} & 0 & c_{34} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

と定める。勿論、

$$L_1 + L_2 = (M_1 - I) + (M_3 - I) + (M_4 - I).$$

この L_j を使うと、簡単な計算で

<u>Prop. 7.</u> $M_\infty \equiv M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 = (I - L_2)^{-1}(I + L_1).$

又、(A-1) より $\det(M_\infty - fI) = (f_1 - f)^2 (f_2 - f)^2$ かつ $\operatorname{rank}(M_\infty - f_j I) = 2$ $(j = 1, 2)$ である。この事と、Prop. 7 より

<u>Prop. 8.</u> f_j は $\det[(L_1 + fL_2) - (f-1)I] = 0$ の重根であり、$\operatorname{rank}[(L_1 + f_j L_2) - (f-1)I] = 2$.

この Prop. 8 を用い、Prop. 4 に於ける計算と全く同じ計算をすることによって、

<u>Theorem 9.</u> 系(#)のモノドロミー群は、次の7つの関係

式によって定まる。

$$\gamma_{13} = \frac{e_2(e_1-f_1)(e_1-f_2)}{(e_1-1)(e_1-e_2)f_1f_2} \cdot \frac{\gamma_{43}}{\gamma_{41}} .$$

$$\gamma_{14} = \frac{(e_1-f_1)(e_1-f_2)(e_1e_3-f_1f_2)}{e_1e_3(e_1-1)(e_4-1)(e_2-e_1)} \cdot \frac{1}{\gamma_{41}} .$$

$$\gamma_{23} = \frac{e_1(e_2-f_1)(e_2-f_2)}{(e_2-1)(e_2-e_1)f_1f_2} \cdot \frac{\gamma_{43}}{\gamma_{42}} .$$

$$\gamma_{24} = \frac{(e_2-f_1)(e_2-f_2)(e_2e_3-f_1f_2)}{e_2e_3(e_2-1)(e_4-1)(e_1-e_2)} \cdot \frac{1}{\gamma_{42}} .$$

$$\gamma_{31} = \frac{e_2e_3-f_1f_2}{e_2(e_3-1)} \cdot \frac{\gamma_{41}}{\gamma_{43}} .$$

$$\gamma_{32} = \frac{e_1e_3-f_1f_2}{e_1(e_3-1)} \cdot \frac{\gamma_{42}}{\gamma_{43}}$$

$$\gamma_{34} = \frac{(e_1e_3-f_1f_2)(f_1f_2-e_2e_3)}{e_1e_2e_3(e_3-1)(e_4-1)} \cdot \frac{1}{\gamma_{43}} .$$

勿論、行列Aと同様、3つの *non-zero constant* は値を任意に指定できるので、それを、今の場合は γ_{41}、γ_{42}、γ_{43} に取ってある。

この定理より、次の定理も容易に証明される。

Theorem 10. 次の4つは同値である。

(a) 系(♯)は irreducible.

(b) (♯)のモノドロミー群は irreducible.

(c) M_j の non-trivial components $c_{jk}=(e_j-1)\gamma_{jk}$ は全て0でない。

(d) $f_1f_2 \neq e_1e_3$, e_2e_3、かつ $f_j \neq e_k$ $(j,k=1,2)$.

注意. 系(♯)は Appellの超幾何函数 $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)$ がみたす偏微分方程式系の、一次元の切り口に現われる。

Reference.

[1] K. Okubo, Connection problems for systems of linear differential equations; Japan-U.S. Seminar on Ordinary and Functional Differential Equations, pp. 238-248. Springer.